

# MÔ HÌNH ĐỘNG LỰC TAY MÁY MỘT KHÂU ĐÀN HỒI CHUYỂN ĐỘNG QUAY

## 1. Mở đầu

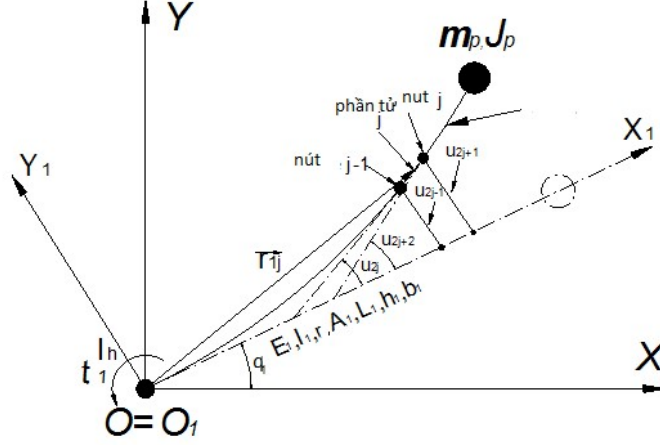
Hệ tay máy có các khâu đàn hồi được sử dụng chủ yếu trong công nghệ không gian, trong các lò phản ứng hạt nhân, y tế ... Tính linh hoạt, khối lượng nhỏ, tốc độ cao, mức độ tiêu tốn năng lượng thấp là những ưu điểm vượt trội của lớp tay máy dạng này. Tuy nhiên, do có thiết kế đến tính đàn hồi của các khâu mà vấn đề dao động, tính ổn định, chính xác vị trí, vận tốc... trở nên khó xác định. Chính vì vậy việc mô hình động lực gần với thực tế đóng vai trò hết sức quan trọng để điều khiển cơ hệ. Đã có một số nghiên cứu nhằm giải quyết vấn đề này nhưng còn chưa đầy đủ và chưa mang tính tổng quát hóa do tính phức tạp của hệ thống. Tokhi [1] đưa ra lý thuyết và áp dụng để phân tích động lực của tay máy một khâu đàn hồi với mô hình động lực được xây dựng dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Kou và Jin [2] đã đề cập đến việc điều khiển cánh tay robot đàn hồi cách sử dụng luật mờ và phương pháp nhiễu loạn đơn lẻ. Một mô hình cơ cấu với cả hai khâu đàn hồi đã được nghiên cứu trong [3] bằng cách sử dụng công thức Euler-Lagrange kết hợp và phương pháp phương pháp giả định. Gavrilou [4] chứng minh rằng lý thuyết điều khiển tuyến tính nói chung không thích hợp cho hệ thống thao tác với khâu đàn hồi. Mặt khác, có rất nhiều nhà nghiên cứu tập trung xây dựng trương trình điều khiển bằng cách tối ưu tham số. Tang và Sun [5] đã sử dụng thuật toán mạng thần kinh để kiểm soát vị trí đầu của một tay máy đàn hồi. Becedas [6] đã giới thiệu một phương pháp mới (GPI) để điều khiển cánh tay robot đàn hồi bằng một động cơ thông thường với bộ truyền động bánh răng bị ảnh hưởng mạnh bởi mô men ma sát không tuyến tính. Matinez [7] đã sử dụng một phiên bản mới của thuật toán xấp xỉ ngẫu nhiên nhiễu loạn xáo trộn (SPSA) đồng thời để tối ưu hóa các tham số quan sát phi tuyến để kiểm soát rung động của một tay máy đàn hồi. Yatim [9] trình bày sự phát triển của một bộ điều khiển PID tối ưu để kiểm soát dao động của các cấu trúc đàn hồi bằng cách sử dụng Particle Swarm Optimization (PSO) để điều chỉnh các tham số PID. Zain và Tokhi [10] đã nghiên cứu mô phỏng động lực và điều khiển tối ưu hóa dựa trên các thuật toán di truyền (GAs) cho một hệ một khâu đàn hồi trong chuyển động phẳng theo chiều dọc nhưng mô hình động của hệ thống được rút ra bằng phương pháp khác biệt hữu hạn (FD) Không có ảnh hưởng của giảm chấn và tải trọng.

Nghiên cứu này đưa ra một mô hình động lực tổng quát của một tay máy một khâu đàn hồi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên phương pháp Lagrange. Hệ thống điều khiển được xây dựng bằng các thuật toán di truyền để tối ưu hóa các tham số của PID với tín hiệu đầu vào là góc trung tâm. Hàm thích ứng được xây dựng dựa trên các sai số đầu ra của góc trung tâm, độ lệch đàn hồi và độ dốc của điểm kết thúc của tay máy đàn hồi

## 2. Mô hình động lực

### 2.1. Mô hình phần tử hữu hạn

Trong bài này, ta xét một tay máy một khâu đàn hồi chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang như trong hình. 1.



hình.1. tay máy một khâu đàn hồi

Khi chưa biến dạng khâu là một thanh thẳng

Trong đó ta có các ký hiệu:  $XOY$ : Hệ quy chiếu cố định;  $X_1O_1Y_1$ : hệ quy chiếu gắn với khâu một;  $r_{1j}$ : Véc tơ xác định từ  $O_1$  tới phần tử thứ  $j$  trên hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $r_{01j}$ : véc tơ từ  $O$  tới phần tử thứ  $j$  trên hệ  $XOY$ ;  $r_1$ : Véc tơ từ  $O_1$  đến điểm cuối khâu trong hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $r_{01}$ : Véc tơ từ  $O$  đến điểm cuối của khâu trong hệ  $XOY$ ;  $q_1(t)$ : góc quay tại  $O$  giữa  $O_1X_1$  và  $OX$ ;  $\tau_1$ : mô men của động cơ;  $\rho_1(kg/m^3)$ ,  $E_1(N/m^2)$ ,  $I_1(m^4)$ : khối lượng riêng, mô đun Young, mô men quán tính diện tích của khâu;  $L_1(m)$ ,  $h_1(m)$ ,  $b_1(m)$ ,  $A_1(m^2)$ : chiều dài, bề rộng, diện tích mặt cắt của khâu;  $I_h(kg.m^2)$ : mô men quán tính động cơ;  $m_p(kg)$ : khối lượng tải trọng tại điểm cuối;  $J_p(kg.m^2)$ : mô men quán tính tải trọng;  $w_i(x_j, t)$ : chuyển vị đàn hồi của phần tử  $j$  với tọa độ  $(x_j, y_j)$  trong hệ  $X_1O_1Y_1$ ;  $N_j(x_j)$ ,  $Q_j(t)$ ,  $\phi_i(x_j)$ ,  $l_j$ : hàm dạng suy rộng trong lý thuyết phần tử hữu hạn, véc tơ chuyển vị đàn hồi, hàm dạng và chiều dài phần tử thứ  $j$ ;  $u_{2j-1}, u_{2j}, u_{2j+1}, u_{2j+2}$ : chuyển vị dài và chuyển vị góc tại điểm đầu và điểm cuối phần tử thứ  $j$ ;  $n_1$ : số phần tử của khâu;  $T_k, P_k, M_k, K_k$ : động năng đàn hồi, thế năng đàn hồi, ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của phần tử thứ  $k$ ;  $T_{dc}, M_{dc}$ : động năng và ma trận độ cứng của motor;  $T_p, M_{pT}$ : động năng và ma trận độ cứng của tải trọng;  $T_1, P_1, M_1, K_1$ : động năng đàn hồi, thế năng đàn hồi, ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của khâu

Tổng chuyển vị đàn hồi của phần tử thứ  $j$  trong hệ  $X_1O_1Y_1$ :

$$w_j(x_j, t) = N_j(x_j)Q_j(t) \quad (1)$$

Trong đó  $N_j(x_j)$ ,  $Q_j(t)$  cho bởi:

$$\begin{cases} N_j(x_j) = [\phi_1(x_j) & \phi_2(x_j) & \phi_3(x_j) & \phi_4(x_j)] \\ Q_j(t) = [u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2}]^T \end{cases} \quad (2)$$

Với:

$$\phi_1(x_j) = 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}; \phi_2(x_j) = x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}; \phi_3(x_j) = \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}; \phi_4(x_j) = \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \quad (3)$$

Véc tơ  $r_{1j}$  trong hệ  $O_1X_1Y_1$  có dạng:

$$r_{1j} = \begin{bmatrix} (j-1)l_j + x_j \\ w_j(x_j, t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ma trận chuyển  $T_0^1$  từ hệ  $X_1O_1Y_1$  sang hệ  $XOY$ :

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Véc tơ tọa độ phần tử thứ  $j$  trong hệ  $OXY$  cho bởi:

$$r_{01j} = T_0^1 r_{1j} = \begin{bmatrix} [(j-1)l_j + x_j] \cos q_1 - w_j(x_j) \sin q_1 \\ [(j-1)l_j + x_j] \sin q_1 + w_j(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Vậy ta có véc tơ định vị điểm cuối khâu:

$$r_{01} = T_0^1 r_{11} = \begin{bmatrix} L_1 \cos q_1 - u_{2n_1+1} \sin q_1 \\ L_1 \sin q_1 + u_{2n_1+1} \cos q_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

## 2.2. Động năng của hệ

Động năng tổng thể của hệ là tổng động năng đàn hồi của tay máy, động năng động cơ và động năng tải trọng:

$$T_1 = T_k + T_{dc} + T_p \quad (8)$$

Động năng đàn hồi của khâu là tổng động năng của các phần tử của khâu:

$$T_k = \sum_{j=1}^{n_1} T_{1j} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T(t) M_{1j} \dot{Q}_{1j}(t) = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_k \dot{Q}_1(t) \quad (9)$$

Trong đó  $T_{1j}$  là động năng của phần tử thứ  $j$  và được tính bởi công thức:

$$T_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial t} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial t} \cdot \frac{\partial r_{01j}}{\partial t} \right] dx_j \quad (10)$$

Ta có:

$$\frac{\partial r_{01j}}{\partial t} = \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \dot{u}_{2j-1} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \dot{u}_{2j} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \dot{u}_{2j+1} + \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \dot{u}_{2j+2}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} & \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{u}_{2j-1} \\ \dot{u}_{2j} \\ \dot{u}_{2j+1} \\ \dot{u}_{2j+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \end{bmatrix} \dot{Q}_{1j}
\end{aligned}$$

Với  $Q_{1j}$  véc tơ tọa độ suy rộng của phần tử thứ  $j$ :

$$Q_{1j} = \begin{bmatrix} q_1 & u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2} \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

$Q_1(t)$  là véc tơ tọa độ suy rộng của cả khâu:

$$Q_1(t) = \begin{bmatrix} q_1 & u_1 & u_2 & \cdot & \cdot & u_{2n_1-1} & u_{2n_1} & u_{2n_1+1} & u_{2n_1+2} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

Trong đó  $u_1, u_2, u_{2n_1+1}, u_{2n_1+2}$  are biến dạng dài và góc quay tại điểm đầu và điểm cuối khâu

Vậy động năng phần tử thứ  $j$  là:

$$\begin{aligned}
T_{1j} &= \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \dot{Q}_{1j}^T \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] \dot{Q}_{1j} dx_j \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \dot{Q}_{1j}^T \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] \dot{Q}_{1j} dx_j = \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T \left[ \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j \right] \dot{Q}_{1j} \\
&= \frac{1}{2} \dot{Q}_{1j}^T M_{1j} \dot{Q}_{1j}
\end{aligned}$$

Trong đó:  $M_{1j} = \int_0^{l_j} \rho_1 A_1 \left[ \frac{\partial r_{01j}^T}{\partial q_k} \right] \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_k} \right] dx_j$

Ta có  $\frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} = \begin{bmatrix} -[(j-1)l_j + x_j] \sin q_1 - N_j(x_j) Q_j(t) \cos q_1 \\ [(j-1)l_j + x_j] \cos q_1 - N_j(x_j) Q_j(t) \sin q_1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -C \sin q_1 - D \cos q_1 \\ C \cos q_1 - D \sin q_1 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T = \begin{bmatrix} -C \sin q_1 - D \cos q_1 & C \cos q_1 - D \sin q_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vậy  $\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right] = \left( -C \sin q_1 - D \cos q_1 \right)^2 + \left( C \cos q_1 - D \sin q_1 \right)^2 = C^2 + D^2$

Với  $C = [(j-1)l_j + x_j]$ ;  $D = N_j(x_j)Q_j(t)$

Ta có  $M_{1j}(1,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left\{ \left[ [(j-1)l_j + x_j] \right]^2 + \left[ N_j(x_j)Q_j(t) \right]^2 \right\} dx_j$

Trong đó:  $\int_0^{l_j} \left[ [(j-1)l_j + x_j] \right]^2 dx_j = \frac{3j^2 - 3j + 1}{3} l_j^3$

$$\begin{aligned} \int_0^{l_j} \left[ N_j(x_j)Q_j(t) \right]^2 dx_j &= \int_0^{l_j} Q_j^T(t) N_j^T(x_j) N_j(x_j) Q_j(t) dx_j \\ &= Q_j^T(t) \int_0^{l_j} N_j^T(x_j) N_j(x_j) dx_j Q_j(t) \end{aligned}$$

Lại có  $\int_0^{l_j} N_j^T(x_j) N_j(x_j) dx_j = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{410} \begin{bmatrix} 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{410} M_{1*}$

Vậy

$$\int_0^{l_j} \left[ N_j(x_j)Q_j(t) \right]^2 dx_j = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \begin{bmatrix} u_{2j-1} & u_{2j} & u_{2j+1} & u_{2j+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2j-1} \\ u_{2j} \\ u_{2j+1} \\ u_{2j+2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,1) = \rho_1 A_1 \frac{3j^2 - 3j + 1}{3} l_j^3 + \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} Q_j^T M_{1*} Q_j$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,1) = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \left[ 140(3j^2 - 3j + 1)l_j^2 + Q_j^T M_{1*} Q_j \right]$$

Ta có  $\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 \\ \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right] = \phi_1^2(x_j)$$

Vậy  $M_{1j}(2,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \phi_1^2(x_j) dx_j = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \frac{13}{35} \rho_1 A_1 l_j$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j-1}} \right] = (-C \sin q_1 - D \cos q_1) \left( -\phi_1(x_j) \sin q_1 \right) + (C \cos q_1 - D \sin q_1) \phi_1(x_j) \cos q_1$$

$$= C \phi_1 = [(j-1)l_j + x_j] \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)$$

$$M_{1j}(1,2) = M_{1j}(2,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{10j-7}{20} l_j^2$$

$$\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 \\ \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right] = \phi_2^2(x_j)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(3,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{l_j^3}{105}$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}} \right] = C \phi_2 = [(j-1)l_j + x_j] \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,3) = M_{1j}(3,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{5j-3}{60} l_j^3$$

$$\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} = \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 & \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right] = \phi_3^2(x_j)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(4,4) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{13}{35} l_j$$

$$\left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}} \right] = C \phi_3 = [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right)$$

$$\Rightarrow M_{1j}(1,4) = M_{1j}(4,1) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{10j-3}{20} l_j^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} &= \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} \right]^T = \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 & \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} \right] &= \phi_4^2(x_j) \\
\Rightarrow M_{1j}(5,5) &= \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right)^2 dx_j = \rho_1 A_1 \frac{l_j^3}{105} \\
\left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial q_1} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} \right] &= C \phi_4 = [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right) \\
\Rightarrow M_{1j}(1,5) = M_{1j}(5,1) &= \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} [(j-1)l_j + x_j] \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \left( -\frac{5j-2}{60} l_j^3 \right) \\
\left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j}} \right] &= \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 \\ \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\
&= \phi_1(t) \phi_2(t) = \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right) \\
M_{1j}(2,3) = M_{1j}(3,2) &= \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{11}{210} l_j^2 \\
\left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+1}} \right] &= \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\
&= \phi_1(t) \phi_3(t) = \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \\
M_{1j}(2,4) = M_{1j}(4,2) &= \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( \frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{9}{70} l_j \\
\left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j-1}} \right]^T \left[ \frac{\partial r_{O1j}}{\partial u_{2j+2}} \right] &= \begin{bmatrix} -\phi_1(x_j) \sin q_1 & \phi_1(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \\
&= \phi_1(t) \phi_4(t) = \left( 1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3} \right) \left( \frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j} \right)
\end{aligned}$$

$$M_{1j}(2,5) = M_{1j}(5,2) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(1 - \frac{3x_j^2}{l_j^2} + \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \left(\frac{-13}{420}\right) l_j^2$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 \\ \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_2(t) \phi_3(t) = \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right)$$

$$M_{1j}(3,4) = M_{1j}(4,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \frac{13}{420} l_j^2$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_2(x_j) \sin q_1 & \phi_2(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_2(t) \phi_4(t) = \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right)$$

$$M_{1j}(3,5) = M_{1j}(5,3) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(x_j - \frac{2x_j^2}{l_j} + \frac{x_j^3}{l_j^2}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \left(-\frac{1}{140}\right) l_j^3$$

$$\left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+1}}\right]^T \left[\frac{\partial r_{01j}}{\partial u_{2j+2}}\right] = \begin{bmatrix} -\phi_3(x_j) \sin q_1 & \phi_3(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\phi_4(x_j) \sin q_1 \\ \phi_4(x_j) \cos q_1 \end{bmatrix}$$

$$= \phi_3(t) \phi_4(t) = \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right)$$

$$M_{1j}(4,5) = M_{1j}(5,4) = \rho_1 A_1 \int_0^{l_j} \left(\frac{3x_j^2}{l_j^2} - \frac{2x_j^3}{l_j^3}\right) \left(\frac{x_j^3}{l_j^2} - \frac{x_j^2}{l_j}\right) dx_j = \rho_1 A_1 \left(-\frac{11}{210}\right) l_j^2$$

Ma trận khối lượng của phần tử thứ  $j$ :

$$M_{1j} = \frac{\rho_1 A_1 l_j}{420} \begin{bmatrix} 140l_j^2(3j^2 - 3j + 1) + Q_j^T M_{1*} Q_j & 21l_j(10j - 7) & 7l_j^2(5j - 3) & 21l_j(10j - 3) & -7l_j^2(5j - 2) \\ 21l_j(10j - 7) & 156 & 22l_j & 54 & -13l_j \\ 7l_j^2(5j - 3) & 22l_j & 4l_j^2 & 13l_j & -3l_j^2 \\ 21l_j(10j - 3) & 54 & 13l_j & 156 & -22l_j \\ -7l_j^2(5j - 2) & -13l_j & -3l_j^2 & -22l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Có thể viết dưới dạng:

$$M_k = \sum_{j=1}^{n_1} M_{1j} \quad (14)$$



$T_{dc}$  có thể viết dưới dạng ma trận:

$$T_{dc} = \frac{1}{2} I_h \dot{q}_1^2(t) = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_{dc} \dot{Q}_1(t) \quad (15)$$

Trong đó:

$$M_{dc} = \begin{bmatrix} I_h & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Động năng của tải trọng cho bởi:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \left[ \frac{\partial r_{01}}{\partial t}(l, t) \right]^2 + \frac{1}{2} J_p (\dot{q}_1 + \dot{u}_{2n_1+2})^2 = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_{pT} \dot{Q}_1(t) \quad (17)$$

Trong đó:

$$M_{pT} = \begin{bmatrix} m_p L_1^2 + J_p & 0 & . & m_p L_1 & J_p \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 0 & . & . \\ m_p L_1 & . & 0 & m_p & 0 \\ J_p & 0 & . & 0 & J_p \end{bmatrix} \quad (18)$$

Thay vào (8) tổng động năng của hệ là:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{Q}_1^T(t) M_1 \dot{Q}_1(t) \quad (19)$$

Trong đó:

$$M_1 = M_k + M_{dc} + M_{pT} \quad (20)$$

### 2.3. Tổng thế năng đàn hồi của hệ

Thế năng tổng thể của hệ là tổng thế năng đàn hồi, thế năng động cơ và thế năng tải trọng :

$$P_1 = \sum_{j=1}^{n_1} P_{1j} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2} Q_{1j}^T(t) K_{1j} Q_{1j}(t) = \frac{1}{2} Q_1^T(t) K_1 Q_1(t) \quad (21)$$

Trong đó:

$$P_{1j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} E_1 I_1 \left[ \frac{\partial^2 w_j(x_j, t)}{\partial x_j^2} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} \int_0^{l_j} E_1 I_1 \left[ \frac{\partial^2 N_{1j}(x_j) Q_{1j}(t)}{\partial x_j^2} \right]^2 dx_j = \frac{1}{2} Q_{1j}^T(t) K_{1j} Q_{1j}(t) \quad (22)$$

Với  $K_{1j}$  là ma trận độ cứng của phần tử thứ  $j$ :

$$K_{1j} = \frac{E_1 I_1}{l_j^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l_j & -12 & 6l_j \\ 0 & 6l_j & 4l_j^2 & -6l_j & 2l_j^2 \\ 0 & -12 & -6l_j & 12 & -6l_j \\ 0 & 6l_j & 2l_j^2 & -6l_j & 4l_j^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Ma trận độ cứng tổng thể cho bởi:

$$K_1 = \sum_{j=1}^{n_1} K_{1j} \quad (24)$$

### 2.3. Hệ phương trình động lực

Hệ phương trình chuyển động của cơ cấu tay máy một khâu đàn hồi được thiết lập bằng phương pháp Lagrange với hàm  $L = T - P$ , véc tơ tọa độ suy rộng  $Q_1(t)$  véc tơ tải trọng ngoài  $F_1 = [\tau_1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ . Hệ phương trình có dạng :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_1}{\partial \dot{Q}_1} \right) - \frac{\partial L_1}{\partial Q_1} = F_1 \quad (25)$$

Xét hệ có cản, hệ phương trình dao động trở thành:

$$M_1 \ddot{Q}_1(t) + D_1 \dot{Q}_1(t) + K_1 Q_1(t) = F_1(t)$$

Trong đó  $D_1$  là ma trận cản:

$$D_1 = \alpha M_1 + \beta K_1 \quad (26)$$

Với  $\alpha, \beta$  là hệ số cản của khâu.

### 2.4. Điều kiện biên

Ta xét hệ tay máy là một phân tử:  $n_1 = 1, j = 1$ . Điểm đầu của khâu gắn chặt với động nên ta có chuyển vị dài và chuyển vị góc là bằng không khi gắn với hệ  $OX$ . Bởi vậy  $u_1 = 0, u_2 = 0$ .

Sử dụng điều kiện biên ta có ma trận khối lượng và ma trận độ cứng trở thành:

$$M_1 = \begin{bmatrix} (140L_1^2 + Q_j^T M_{1*} Q_j) + I_h + m_p L_1^2 + J_p & 147S_1 L_1 + m_p L_1 & -21S_1 L_1^2 + J_p \\ 147S_1 L_1 + m_p L_1 & 156S_1 + m_p & -22S_1 L_1 \\ -21S_1 L_1^2 + J_p & -22S_1 L_1 & 4S_1 L_1^2 + J_p \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$K_1 = \frac{E_1 I_1}{L_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6L_1 \\ 0 & -6L_1 & 4L_1^2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Và véc tơ tọa độ suy rộng và lực suy rộng cho bởi:

$$\begin{cases} Q_1(t) = [q_1(t) & u_3(t) & u_4(t)]^T \\ F_1(t) = [\tau_1(t) & 0 & 0]^T \end{cases} \quad (29)$$

Với  $D_1 = \alpha M_1 + \beta K_1$

Lấy  $\alpha = 3.2; \beta = 0.00005$

Vậy phương trình động lực miêu tả chuyển động của tay máy một khâu đàn hồi có dạng ma trận như sau:

$$M_1 \ddot{Q}_1(t) + D_1 \dot{Q}_1(t) + K_1 Q_1(t) = F_1(t) \quad (30)$$

### 3. Kết luận

Báo cáo này, tác giả trình bày mô hình động lực cho tay máy một khâu đàn hồi chuyển động quay dựa trên mô hình dầm Euler – Bernoulli và phương pháp phần tử hữu hạn. Hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có được nhờ phương trình Lagrange loại 2. Mô hình động lực học này là cơ sở quan trọng để giải quyết các bài toán tiếp theo như động lực học thuận, động lực học ngược và điều khiển.

### Tài liệu tham khảo

- [1] M.O. Tokhi, Z. Mohamed and M.H. Shaheed, *Dynamic characterization of a flexible manipulator system*. Robotica / Volume 19 / Issue 05 / September 2001, pp 571 – 580.
- [2] K.Y. Kuo, J.Lin, *Fuzzy logic control for flexible link robot arm by singular perturbation approach*. Applied Soft Computing 2 (2002) 24–38.
- [3] B. Subudhi, A.S. Morris, *Dynamic modelling simulation and control of a manipulator with flexible links and joints*, Robotics and Autonomous Systems 41 (2002), 257–270.
- [4] Victor Gavrilou, *Design of dynamic nonlinear control techniques for flexible link manipulator*, Thesis submitted for the degree of master of applied Science, Concordia University Montreal, Quebec, Canada (2005).
- [5] Yuan-Gang Tang, Fu-Chun Sun, Zeng-Qi Sun, and Ting-Liang Hu, *Tip Position Control of a Flexible-Link Manipulator with Neural networks*, International Journal of control automation and systems (2006), vol.4, No.3, Pg 308-317.
- [6] J. Becedas, V. Feliu and H.Sira-Ramirez, *GPI Control for a Single-Link Flexible manipulator*, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science (2007), San Francisco, USA.
- [7] Jorge Ivan Medina Martinez, Umerujan Sawut, Kazushi Nakano, *Application of Non-linear Observer with Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation Method to Single Flexible Link SMC*, SICAnnual Conference (2008), The University Electro Communications, Japan.
- [8] Jhih-Wei Huang, Jung-Shan Lin, *Backstepping Control Design of a Single-Link Flexible Robotic Manipulator*, Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control (2008), Seoul, Korea.
- [9] Hanim Mohd Yatim and Intan.Z.Mat Darus, *Swarm Optimization of an Active Vibration Controller for Flexible*, Latest Trends in Circuits, Control and Signal Processing (2010), ISBN: 978-1-61804-173-9.

- [10] B.A. Md Zain, M. O. Tokhi, and S.F. Toha (2009), *PID-based Control of a Single-Link Flexible Manipulator in Vertical Motion with GAs optimization*, Third UK Sim European Symposium on Computer Modeling and Simulation (2009).
- [11] Hughes P. C. (1987). *Space structure vibration modes: How many exists? Which are important*. IEEE Control Systems Magazine (1987), 7 (1), 22–28.
- [12] Oosting, K. and Dickerson, S. L. *Simulation of a high-speed lightweight arm*. Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (1988), Philadelphia, Pennsylvania, USA, 24–29 April 1988, 494–496.
- [13] Dado, M and Soni, A. H. *A generalized approach for forward and inverse dynamics of elastic manipulators*. Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation (1986), San Francisco, California, USA, 7–10 April 1986, 359–364